Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 19, S. 1 (2003), 62–71

LÀM ĐẦY ĐỦ ĐẠI SỐ GIA TỬ TRÊN CƠ SỞ BỔ SUNG CÁC PHẦN TỬ GIỚI HẠN

NGUYỄN CÁT HỒ[1], NGUYỄN VĂN LONG[2]

[1] *Viện Công nghệ thông tin*
[2] *Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội*

Abstract. The notion of quantifying semantic mappings of hedge algebras was introduced and investigated in [1, 8, 9] based on fuzziness measure of linguistic hedges and vague concepts (or terms), which are interpreted as their parameters. The construction of these mappings has suggested us be necessary to complete foundation to study fuzziness measure and quantifying sementic mappings more strictly. In the paper, we shall introduce additional operations σ and ϕ into refined elements $\sigma(x)$ and $\phi(x)$ a semantics saying that the former is the least upper bound and the latter is the greatest lower bound of the set $LH(x)$ in the have been completed algebras. In order to realize this, additional axioms related to the new operations σ and ϕ will be introduced and their several fundamental properties will be established.

Tóm tắt. Trong [1,8,9] các tác giả đã đưa ra phương pháp xây dựng hàm định lượng đại số gia tử (ĐSGT) trên cơ sở định nghĩa các tham số độ đo tính mờ của gia tử và các khái niệm mờ. Việc xây dựng các khái niệm này đã gợi ý cho chúng tôi cần nghiên cứu việc bổ sung các phần tử "giới hạn" vào ĐSGT với hy vọng rằng sẽ làm cho các khái niệm này có cơ sở toán học chặt chẽ hơn. Trong bài báo này, chúng tôi đưa thêm hai toán tử σ, ϕ vào đại số gia tử mở rộng của một biến ngôn ngữ với định ý gán cho $\sigma(x)$, $\phi(x)$ ngữ nghĩa tương ứng với cận trên đúng và cận dưới đúng của tập $LH(x)$ nhằm bổ sung các phần tử giới hạn và làm đầy đủ miền giá trị của biến ngôn ngữ đó. Một hệ tiên đề cho σ, ϕ được xây dựng và các tính chất cơ bản của đại số sau khi bổ sung hai toán tử σ, ϕ cũng được khảo sát và chứng minh.

1. MỞ ĐẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM

Xét đại số gia tử mở rộng $AX = (X, G, LH, \leq)$ trong đó X là tập cơ sở, G là tập các phần tử sinh, LH là dàn phân phối các gia tử sinh tự do từ H qua các phép toán $\wedge$, $\vee$ và $\leq$ là quan hệ thứ tự bộ phận trên X.

Ta biết rằng $LH(x)$ là tập tất cả các phần tử sinh được từ x nhờ tác động liên tiếp các toán tử một ngôi trong LH. Nhìn chung ta chưa biết có tồn tại cận trên đúng và cận dưới đúng của tập $LH(x)$ hay không, đặc biệt nếu tập $LH(x)$ là vô hạn thì chắc chắn chúng không tồn tại trong X. Như vậy xuất hiện một nhu cầu tự nhiên giải bài toán làm đầy đủ đại số gia tử AX để thu được đại số $\underline{AX} = (\underline{X}, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ sao cho với mỗi phần tử trong $x \in \underline{X}$, tập $LH(x)$ có cận trên đúng và cận dưới đúng trong $\underline{X}$.

Tuy nhiên động cơ thúc đẩy việc bổ sung các phần tử giới hạn như vậy xuất phát từ yêu cầu nghiên cứu ngữ nghĩa định lượng của các khái niệm ngôn ngữ hay các khái niệm mờ.

Giả sử AX là một đại số gia tử mở rộng tuyến tính. Khi đó một ánh xạ $f : X \longrightarrow [0, 1]$ thoả mãn các điều kiện đã nêu trong [9] gọi là một ánh xạ ngữ nghĩa định lượng của AX, hay của biến ngôn ngữ tương ứng. Nhờ ánh xạ này chúng ta có thể định nghĩa được khái niệm rất khó xác định và khó lượng hóa trong lý thuyết tập mờ: Tính mờ của một khái niệm $x \in X$ được xác định bởi đường kính của tập ảnh $f(LH(x))$ và ký hiệu là $\mu(x)$. Để thấy sự cần thiết phải bổ sung phần tử cận trên đúng và cận dưới đúng ta hãy xét chẳng hạn hai phần tử sinh nguyên thuỷ của một biến ngôn ngữ. Trong [9] ta phải buộc chấp nhận giả thiết rằng: $\mu(c^-) + \mu(c^+) = 1$, với ý nghĩa trực quan được ngầm định nhưng chưa chứng minh là *supremum* $f(LH(c^-))$ = *infimum* $f(LH(c^+)) = \mu(c^-)$. Giả thiết này cũng bắt nguồn từ một trực cảm là tập $f(LH(c^-)) \cup f(LH(c^+))$ trù mật trong đoạn [0,1] ([8, 9]).

Cũng giống cách tiếp cận giải quyết vấn đề này trong [2, 4], ta sẽ bổ sung phần tử vào X bằng cách nhúng AX vào đại số $\underline{AX} = (\underline{X}, G, LH, \sigma, \phi, \leq)$ với việc thêm hai toán tử một ngôi σ, ϕ mà ngữ nghĩa định ý của nó là $\sigma(x)$ là cận trên đúng của tập $LH(x)$ và $\phi(x)$ là cận dưới đúng của tập $LH(x)$.

Trong bài báo này chúng tôi sẽ đưa ra một hệ tiên đề để đảm bảo được ngữ nghĩa mong muốn của hai toán tử σ, ϕ và nghiên cứu những tính chất cơ bản làm rõ các mối quan hệ thứ tự giữa các phần tử trong tập $\underline{X}$. Đây là vấn đề quan trọng vì ta nhớ lại rằng theo cách tiếp cận của đại số gia tử, ngữ nghĩa của các khái niệm của một biến ngôn ngữ được biểu thị qua quan hệ thứ tự của các phần tử.

Giả sử H là tập các gia tử được phân hoạch thành hai tập H^+ và H^-, và các tập $H^+ + I$ và $H^- + I$ tạo thành các dàn modular với các phần tử đơn vị, hay phần tử lớn nhất, tương ứng là V, L và toán tử "không", hay phần tử nhỏ nhất, được chọn là toán tử đồng nhất I thoả mãn $Ix = x$, với mọi $x \in X$. Đặt $UOS = \{V, L\}$.

Để đơn giản hóa việc phát biểu một số tính chất hay trong trình bày ta sử dụng ký hiệu H^c để hiểu chung hoặc là H^+ hoặc là H^-.

Để dễ tham chiếu, chúng ta nhớ lại một số ký hiệu và khái niệm. Giả sử rằng H^c là dàn modular có độ dài hữu hạn được phân bậc bởi hàm độ cao. Khi đó mỗi H^c có thể phân thành nhiều lớp dựa theo hàm độ cao và ký hiệu là H_i^c, ở đây i chỉ độ phân bậc của lớp H_i^c. Ta thấy rằng có những chỉ số mà số phần tử của lớp H_i^c lớn hơn 1, nghĩa là $CardH_i^c > 1$. Ký hiệu tập các chỉ số i này là SI^c, tức là $SI^c = \{i : CardH_i^c > 1\}$. Hơn nữa với mỗi $i \in SI^c$, các tập H_{i+1}^c, H_{i-1}^c chỉ có một phần tử duy nhất, hay $CardH_{i+1}^c = CardH_{i-1}^c = 1$.

Gọi LH_i^c là dàn phân phối sinh tự do từ H_i^c nhờ các toán tử $\wedge, \vee$. Ký hiệu $LH^c = \bigcup_{i=1}^{N^C} LH_i^c$, trong đó N^c là độ cao của dàn LH^c, $c = \{+, -\}$.

Đặt $LH = LH^+ \cup LH^-$.

Ta biết rằng các toán tử đơn vị V, L của $H^+ + I$, $H^- + I$ cũng là các toán tử đơn vị tương ứng trong $LH^+ + I$, $LH^- + I$.

Xét cấu trúc đại số $AX = (X, G, LH, \leq)$ ứng với một miền trị ngôn ngữ của biến ngôn ngữ. Trong cấu trúc này chúng ta có thể biểu thị nhiều tính chất ngữ nghĩa của miền ngôn ngữ. Với $h, k \in LH^c$, ta nói h có tác động ngữ nghĩa yếu hơn k và ký hiệu là $h \leq k$ nếu $x \leq hx \leq kx$ hoặc $x \geq hx \geq kx$, $\forall x \in X$. Hai gia tử h và k được gọi là ngược nhau nếu: $hx \leq x$ khi và chỉ khi $kx \geq x$. Hai gia tử h, k là tương thích nếu: $hx \leq x$ khi và chỉ khi $kx \leq x$ với mọi $x \in X$. Nếu $x \leq hx$ kéo theo $hx \leq khx$ và $x \geq hx$ kéo theo $hx \geq khx$ với mọi $x \in X$ thì k được gọi là *positive* đối với h. Nếu $x \leq hx$ kéo theo $hx \geq khx$ và $x \geq hx$ kéo theo $hx \leq khx$ với mọi $x \in X$ thì k được gọi là *negative* đối với h. Đối với $h,\ k \in H$, ta nói rằng: $hx <\leq kx$ nếu $\forall m,\ n \in N$, $\forall h',\ k' \in UOS$ ta có: $V^m h' hx \leq V^n k' kx$. Ví dụ, ta có thể kiểm chứng trong ngôn ngữ tự nhiên để thấy rằng gia tử "gần" trong "gần đúng" có hiệu quả tác động yếu hơn gia tử " ít" trong "ít đúng". Gia tử "ít" và "gần" có hiệu quả tác động luôn luôn ngược với gia tử "rất", nhưng gia tử "ít" và "gần" lại tương thích với nhau. Còn gia tử "rất" là positive đối với "ít" và đối với chính nó, nhưng negative đối với "gần".

Biểu thức $h_n...h_1u$ được gọi là biểu diễn chuẩn tắc của x đối với u nếu $x = h_n...h_1u$ và $h_i...h_1u \neq h_{i-1}...h_1u$, $\forall i \in N$, mà $i \leq n$.

Trong [7, 10] đã phát triển một hệ tiên đề và nghiên cứu các tính chất phong phú của đại số gia tử $AX = (X, G, LH, \leq)$. Để thuận tiện chúng ta nhắc lại một số tính chất sẽ tham khảo đến sau này.

Mệnh đề 1.1.

(i) *$\forall h \in LH$, tồn tại các toán tử đơn vị h^- và h^+ sao cho h^- là negative và h^+ là possitive đối với h sao cho mọi $h_1, ..., h_n \in LH$, $x \in X$, ta có các bất đẳng thức sau đây:*

$$V^n h^- hx \leq h_n...h_1 hx \leq V^n h^+ hx, \quad \textit{nếu} \ \ hx \geq x$$

$$V^n h^+ hx \leq h_n...h_1 hx \leq V^n h^- hx, \quad \textit{nếu} \ hx \leq x$$

(ii) *Đối với mọi $h \in LH^c$, có tồn tại $o \in UOS$ sao cho với mọi $h_1, ..., h_n \in LH$ và mọi $x \in X$, ta có*

$$h_n...h_1 hx \leq V^n ox \ (\textit{hoặc} \ h_n...h_1 hx \geq V^n ox)$$

Mệnh đề 1.2.

(i) *Tính chất tĩnh tiến: Đối với mỗi $x \in X$, nếu $hx \leq kx$ và h, k thuộc vào cùng một tập LH_i^c, thì với mọi $\delta \in LH^*$, ta có bất đẳng thức sau:*

$$\delta hx \leq \delta kx,$$

và mọi phần tử $u \in LH(hx)$, với $u \not\leq \delta hx$, đều không sánh được với $\delta' kx$, và mọi phần tử $v \in LH(kx)$, với $v \not\geq \delta' kx$ đều không sánh được với δhx.

(ii) *Đối với mỗi $x \in X$, nếu $hx \leq kx$ và h, k thuộc vào hai tập LH_i^c và LH_j^c khác nhau, thì với mọi δ, $\delta' \in LH^*$, ta có bất đẳng thức sau:*

$$\delta hx \leq \delta' kx.$$

(iii) *Đặc biệt nếu một trong hai gia tử h và k là toán tử đồng nhất I thì ta có*

$$\delta hx \leq x, \quad \textit{với} \ \ k = 1 \quad (\textit{do đó} \quad LH(kx) \leq x),$$

và $x \leq \delta' kx$, với $h = I$ (và do đó $LH(kx) \geq x$).

Mệnh đề 1.3.

Giả sử $x \in X$, h, k thuộc vào cùng một tập LH_i^c. Khi đó:

(i) *(Prop. 3.2, [7]) Với mọi $\delta \in LH^*$, δhx là điểm bất động khi và chỉ khi δkx là điểm bất động.*

(ii) *Như là một hệ quả của Mệnh đề 3.2 và 3.4 trong [7], hai tập $LH(hu)$ và $LH(ku)$ là đẳng cấu trong phạm trù các tập sắp thứ tự một phần với ánh xạ đẳng cấu $f : \delta hu \longrightarrow \delta ku$, $\delta \in LH^*$.*

2. TIÊN ĐỀ HÓA ĐẠI SỐ GIA TỬ MỞ RỘNG, ĐẦY ĐỦ

Xét một cấu trúc đại số $\underline{AX} = (X, G, LH_e, \leq)$ như đã đề cập ở trên với $LH_e = LH \cup \{\phi, \sigma\}$, nghĩa là tập các toán tử được bổ xung thêm hai toán tử mới ϕ và σ. Như đã trình bày ở trên, ta ký hiệu $UOS = \{V, L\}$ là tập các toán tử đơn vị tương ứng của LH^+ và LH^-. Để cho dễ hiểu, các phần tử trong UOS được ký hiệu là o hay o' với chỉ số (nếu cần). Vì G là tập các phần tử sinh (generators) nên ta có $LH_e(G) = X$. Ký hiệu $\mathrm{Lim}(X)$ là tập tất cả các phần tử "giới hạn" của $LH(G)$, nghĩa là $\mathrm{Lim}(X) = X \backslash LH(G)$. Sau này ta sẽ chứng tỏ rằng các phần tử trong $\mathrm{Lim}(X)$ có dạng ϕu hoặc σu với $u \in LH(G)$.

Bây giờ ta sẽ đưa ra một cách tiên đề hóa đại số gia tử mở rộng đầy đủ (complete hedge algebra).

Định nghĩa 2.1. Cấu trúc đại số $\underline{AX} = (X, G, LH_e, \leq)$ được gọi là đại số gia tử mở rộng đầy đủ nếu $(LH(G), G, LH, \leq)$ là đại số gia tử và $\underline{AX}$ thoả mãn những tiên đề sau:

(L1) Đối với $x \in X$ và mọi $h \in LH$, $\phi x \leq hx \leq \sigma x$.

(L2) Đối với mọi $x \in X$ và mọi $o \in UOS$,

$$\phi x \leq \phi o x \quad \text{và} \quad \sigma o x \leq \sigma x.$$

Hơn nữa, với mọi k, k', $h', h \in LH$ ta có $k\phi x \leq k'\phi o x$ và $h'\sigma o x \leq h\sigma x$

(L3) Nếu với mọi $x' \in LH(x)$, ta có $x' \leq z$, thì $\sigma x \leq z$, với $z \in X$. Ngược lại nếu với mọi $x' \in LH(x)$, ta có $x' \geq z$, thì $\phi x \geq z$, với $z \in X$.

(L4) Nếu h là phần tử atom trong H^c (tức là phần tử nhỏ nhất trong dàn H^c), thì

$$hx \leq x \text{ kéo theo } \sigma hx = x$$

$$\text{và } hx \geq x \text{ kéo theo } \phi hx = x.$$

(L5) Đối với mọi h, k mà $h \in LH_i^c$, $k \in LH_{i+1}^c$ nếu ϕx, $\sigma x \in \mathrm{Lim}(X)$, hay $\phi x, \sigma x \notin LH(G)$, thì

$$hx \leq kx \text{ kéo theo } \sigma hx = \phi kx,$$

$$\text{và } \quad hx \geq kx \text{ kéo theo } \phi hx = \sigma kx.$$

Để dễ theo dõi, chúng ta nêu lên một số cách hiểu trực giác của một số tiên đề trên.

Tiên đề (L1) theo một nghĩa nào đó thể hiện rằng σ, ϕ có hiệu quả tác động mạnh hơn bất kỳ toán tử nào khác trong LH.

Vì $\phi x \leq ox$ và $ox \leq \sigma x$, nên tiên đề (L2) phản ánh tính kế thừa ngữ nghĩa của hai toán tử mới σ và ϕ.

Tiên đề (L3) cho ta một cảm nhận như sau: Theo tiên đề (L1) σx đã là cận trên của $LH(x)$, kết hợp tiên đề (L3) với (L2) cho ta cảm nhận σx là cận trên bé nhất của $LH(x)$.

Hai tiên đề (L4) và (L5) thể hiện một trực cảm về một tính chất tôpô quan trọng là tập $LH(G)$ phải trù mật trong miền giá trị ngôn ngữ X, vì chẳng hạn nếu trong (L5) ta thay đẳng thức bằng $\sigma hx < \phi kx$ mà theo ngữ nghĩa mong muốn điều này có nghĩa $a = supremumLH(hx) < ifnimumLH(kx) = b$ và do đó giữa a và b sẽ không có một khái niệm ngôn ngữ nào nằm giữa. Về trực quan điều này không thể chấp nhận.

3. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Định lý 3.1. *Giả sử* $AX = (X, G, LH^e, \leq)$ *là đại số gia tử mở rộng đầy đủ. Khi đó với mọi* $x \in X$, *ta có:*

(i) $\phi x \leq x \leq \sigma x$

(ii) $\sigma x = supremumLH(x)$; $\phi x = infimumLH(x)$

Điều này có nghĩa là với mọi $x \in X$, tập $LH(x)$ có cận trên đúng và cận dưới đúng trong X và chúng tương ứng chính là hai phần tử σx và ϕx.

Chứng minh.

(i) Do h bất kỳ nên trong tiên đề (L1) ta có thể chọn h sao cho $x \leq hx$. Khi đó, $x \leq hx \leq \sigma x$ và do đó $x \leq \sigma x$. Bằng lập luận tương tự ta cũng có $\phi x \leq x$.

(ii) Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $LH(x) \leq \sigma x$, nghĩa là với bất kỳ $y \in LH(x)$, ta có $y \leq \sigma x$.

Thật vậy, trong trường hợp $y = x$, theo kết luận (i) vừa chứng minh ta có $y = x \leq \sigma x$.

Trong trường hợp $y \neq x$, nghĩa là $y = \delta hx$, ta xét hai khả năng sau:

Trường hợp 1: $hx \leq x$. Khi đó theo Mệnh đề 1.2(iii), ta luôn có $LH(hx) \leq x$, và do đó kết hợp với mệnh đề (i) ở trên, ta thu được $y \leq x \leq \sigma x$, với mọi $y \in LH(hx)$.

Trường hợp 2: $hx \geq x$. Giả sử y được viết lại dưới dạng $y = h_n ... h_1 hx$. Theo Mệnh đề 1.1(i) ta có $y = h_n ... h_1 hx \leq V^n h^+ x$. Mặt khác áp dụng tiên đề (L2) với $o = h^+$, ta có $\sigma x \geq \sigma h^+ x$ và áp dụng liên tiếp n lần tiên đề (L2) đối với phần tử ở vế phải của bất đẳng thức thu được với $o = V$, ta thu được:

$$\sigma h^+ x \geq \sigma V h^+ x \geq ... \geq \sigma V^n h^+ x.$$

Do đó theo khẳng định (i) đã chứng minh ta suy ra $\sigma x \geq V^n h^+ x \geq y$, $\forall y \in LH(hx)$. Như vậy ta đã chứng minh được rằng: $LH(x) \leq \sigma x$. Theo tiên đề (L3) với $z \geq LH(x)$ thì $z \geq \sigma x$ nên (ii) đã được chứng minh cho toán tử σ.

Đẳng thức đối với ϕ trong (ii) được chứng minh hoàn toàn tương tự. ∎

Định lý 3.2.

(i) *Nếu x là điểm bất động của $h \in LH$ thì nó cũng là điểm bất động của σ và ϕ và do đó ta có thể sử dụng thuật ngữ điểm bất động chung mà không cần nói của toán tử nào.*

(ii) *Với mọi $x \in Lim(X)$, x là điểm bất động.*

Chứng minh.

(i) Do x là điểm bất động của $h \in LH$ nên nó cũng là điểm bất động của mọi $k \in LH$. Vì vậy $LH(x) = \{x\}$ và do đó, theo Định lý 3.1, ta có $\phi x = infimumLH(x) = x$ và $\sigma x = supremumLH(x) = x$, nghĩa là (i) của Định lý 3.2 được chứng minh.

(ii) Trước hết ta xét trường hợp $x \in \mathrm{Lim}(X)$ và có dạng $x = \sigma u$ hoặc $x = \phi u$ với $u \in LH(G)$. Vì trường hợp $x = \phi u$ được chứng minh tương tự nên ta chỉ chứng minh cho trường hợp $x = \sigma u$. Chọn $h \in LH$ sao cho $x \geq hx = h\sigma u$. Áp dụng tiên đề (L2) đối với h và h', với h' được chọn sao cho $h'\sigma ou \geq \sigma ou$, ta thu được $x \geq h\sigma u \geq h'\sigma ou \geq \sigma ou$.

Mặt khác, cũng theo Tiên đề (L2) với $x = ou$ và $o = V$, ta có $\sigma ou \geq \sigma V ou$ và áp dụng liên tiếp (L2) đối với phần tử trong vế phải của bất đẳng thức vừa thu được cũng với $o = V$, ta thu được:

$$\sigma ou \geq \sigma V ou \geq ... \geq \sigma V^n ou, \quad \forall n \in N \quad \text{và} \quad \forall o \in UOS.$$

Lấy phần tử bất kỳ $y = h_m ... h_1 u \in LH(u)$, y sẽ thoả mãn bất đẳng thức sau:

$$y = h_m ... h_1 u \leq V^{m-1} h_1^+ u.$$

Kết hợp với các kết quả thu được ở trên, ta thấy $y \le \sigma ou \le h\sigma u \le x$, $\forall y \in LH(u)$. Theo (L3), điều này chứng tỏ $x = \sigma u \le h\sigma u \le x$. Vậy $hx = x$, hay x là điểm bất động.

Ta xét trường hợp còn lại. Vì $x \in \mathrm{Lim}X$, x phải có dạng $x = k_m...k_1a$ với $a \in G$ (vì $LH^e(G) = X$), trong đó có ít nhất có một $k_i \in \{\sigma, \phi\}$. Gọi j là chỉ số nhỏ nhất sao cho $k_j \in \{\sigma, \phi\}$. Để định ý cho chứng minh ta giả sử $k_j = \phi$. Theo chứng minh trên thì $\phi k_{j-1}...k_1a = \phi u$, ở đây $u = k_{j-1}...k_1a$, là điểm bất động, và do đó, theo mệnh đề (i) của định lý, ta có thể suy ra $x = k_m...k_{j+1}\phi u$ cũng là điểm bất động và $x = \phi u$.

Như vậy ta đã chứng minh được rằng $\forall x \in \mathrm{Lim}X$ đều là điểm bất động và có dạng σu hoặc ϕu. ∎

Định lý 3.3. *Đối với mọi $y \in LH(x)$, $x \in X$, ta có:*

$$\sigma y \le \sigma x \quad \text{và} \quad \phi y \ge \phi x.$$

Chứng minh.

Xét phần tử bất kỳ $y \in LH(x)$. Khi đó y biểu diễn được dưới dạng $y = \delta x$, trong đó δ là một dãy các toán tử trong LH. Lấy một phần tử bất kỳ $y' \in LH(y)$, tức là $y' \in LH(\delta x)$. Khi đó y' có dạng $y' = \delta'\delta x$, nghĩa là $y' \in LH(x)$. Điều này chứng tỏ $LH(y) \subseteq LH(x)$, do đó ta có:

$$supremumLH(y) \le supremumLH(x),$$

$$infimumLH(y) \ge infimumLH(x).$$

Theo Định lý 1.1, ta có kết luận $\sigma y \le \sigma x$ và $\phi y \ge \phi x$. ∎

Định lý 3.4. *Giả sử x, y có biểu diễn dưới dạng $x = \delta hu$, $y = \gamma ku$, với $u \in X$, δ, $\gamma \in LH^*$ (tập các xâu gia tử) và $h \in LH_i^c$, $k \in LH_j^c$, với $i < j$. Khi đó*

$$hu \le ku \quad \textit{kéo theo} \quad \sigma x \le \phi y.$$

Chứng minh.

Giả sử $h \in LH_i^c$, $k \in LH_j^c$, với $i < j$. Theo Mệnh đề 1.2, từ bất đẳng thức $hu \le ku$, ta suy ra:

$$\delta'' hu \le \gamma'' ku, \quad \text{với mọi xâu } \delta'', \gamma'' \in LH^* \tag{3.1}$$

Hãy xét hai giá trị x' và y' bất kỳ, $x' \in LH(x)$, $y' \in LH(y)$. Vậy chúng phải có dạng $x' = \delta'\delta hu$, $y' = \gamma'\gamma ku$. Theo bất đẳng thức (3-1) ta có $x' \le y'$, với $\forall x' \in LH(x)$, do đó $\sigma x \le y'$, $\forall y' \in LH(y)$. Từ đây, theo Định lý 2.1, ta lại suy ra $\sigma x \le infimumLH(y) = \phi y$. Vậy $\sigma x \le \phi y$. Đây là điều cần phải chứng minh. ∎

Định lý 3.5. *Nếu tập $LH(x)$, với $x \in X$, là hữu hạn thì σx, $\phi x \in LH(x)$.*

Chứng minh.

Giả sử h_1^+, h_1^- tương ứng là toán tử đơn vị có tính chất positive, negative đối với h. Ta biết rằng mỗi phần tử $z \in LH(x)$ đều có một biểu diễn chuẩn tắc *duy nhất* đối với x, nghĩa là $z = h_p h_{p-1}...h_1x$, thoả mãn $h_ih_{i-1}...h_1x \ne h_{i-1}...h_1x$, với mọi $i : 1 \le i \le p$. Do $LH(x)$ hữu hạn nên các biểu diễn chuẩn tắc của các phần tử trong $LH(x)$ cũng hữu hạn và do đó tồn tại một phần tử z' có biểu diễn chuẩn tắc là $z' = h_{p'}...h_1x$, với chỉ số p' là lớn nhất.

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $z \in LH(x)$, ta có:

$$\begin{cases} V^{p'}h_1^-h_1x \le z \le V^{p'}h_1^+h_1x \quad \text{với} \quad h_1x \ge x \\ V^{p'}h_1^+h_1x \le z \le V^{p'}h_1^-h_1x \quad \text{với} \quad h_1x \le x \end{cases} \tag{3.2}$$

Xét phần tử bất kỳ $z \in LH(x)$. Giả sử biểu diễn chuẩn tắc của z có dạng $z = h_p...h_1x$. Theo (i), Mệnh đề 1.1, và do $p \le p'$, nên ta có

$V^{p'}h_1^-h_1x \le V^ph_1^-h_1x \le z = h_p...h_1x \le V^ph_1^+h_1x \le V^{p'}h_1^+h_1x$, nếu $h_1x \ge x$,

$V^{p'}h_1^+h_1x \le V^ph_1^+h_1x \le z = h_p...h_1x \le V^ph_1^-h_1x \le V^{p'}h_1^-h_1x$, nếu $h_1x \le x$.

Đây chính là các bất đẳng thức trong (3.2) và chúng chứng tỏ rằng:

$$SupremumLH(x) = V^{p'}h_1^+h_1x,$$

$$InfimumLH(x) = V^{p'}h_1^-h_1x, \quad \text{nếu} \quad h_1x \ge x$$

hoặc là

$$SupremumLH(x) = V^{p'}h_1^-h_1x,$$

$$InfimumLH(x) = V^{p'}h_1^+h_1x, \quad \text{nếu} \quad h_1x \le x.$$

Theo Định lý 2.1 ta có khẳng định σx, $\phi x \in LH(x)$. ■

Định lý 3.6. *Với mọi* $x \in X$ *và mọi* h, $k \in LH_i^c$ *mà* $\sigma hx \notin LH(hx)$ *và* $\sigma kx \notin LH(kx)$, *ta có đẳng thức:*

$$\sigma hx = \sigma kx;$$

Một phát biểu tương tự đối với toán tử ϕ *cũng đúng và ta có:*

$$\phi hx = \phi kx.$$

Chứng minh. Ta chứng minh định lý cho từng trường hợp.

a) Trường hợp $x \le hx$: Vì h, $k \in LH_i^c$, nên theo tính tương thích của h, k, ta có $x \le hx$ và $x \le kx$. Vì $h \ne k$ nên $i \in SI^c$ và theo tính chất dàn đã nêu ở phần mở đầu, LH_{i+1}^c chỉ có một phần tử duy nhất và được kí hiệu là l. Khi đó với mọi k, $h \in LH_i^c$, ta có $k < l$, $h < l$ và vì vậy $hx \le lx$, $kx \le lx$. Theo tiên đề (L4) ta có $\sigma hx = \phi lx$ và $\sigma kx = \phi lx$. Từ đó ta thu được $\sigma hx = \sigma kx$.

b) Trường hợp $x \ge hx$: Do LH_i^c có ít nhất 2 phần tử, $h \ne k$, nên LH_{i-1}^c chỉ có duy nhất một phần tử, kí hiệu là l, và $l < k$, $l < h$. Vì $x \ge hx$, và do đó $x \ge kx$, nên $lx \ge kx$ và $lx \ge hx$. Theo Tiên đề (L4) ta phải có $\sigma kx = \phi lx$ và $\sigma hx = \phi lx$. Vậy, $\sigma kx = \sigma hx$.

Như vậy ta đã chứng minh định lý đúng đối với toán tử σ. Trường hợp đối với toán tử ϕ sẽ được chứng minh tương tự và do đó định lý được hoàn toàn chứng minh. ■

Định lý 3.7. *Giả sử* $x = \gamma hu$, *với* $u \in X$, $h \in LH^c$ *và xâu* $\gamma \in LH^*$. *Khi đó ta có các khẳng định sau:*

$$hu \ge u \quad \textit{kéo theo} \quad \phi x \ge u, \quad \textit{và}$$

$$hu \le u \quad \textit{kéo theo} \quad \sigma x \le u.$$

Chứng minh. Ta cũng chứng minh định lý theo trường hợp.

a) Trường hợp $hu \geq u$: Theo tính chất của đại số gia tử nêu trong Mệnh đề 1.2, ta có $LH(hu) \geq u$. Vì vậy, với mọi xâu $\gamma' \in LH^*$, $\gamma' hu \in LH(hu)$ và do đó $\gamma' hu \geq u$.

Xét giá trị bất kỳ $x' \in LH(\gamma hu)$. Khi đó x' có dạng $x' = \delta\gamma hu$, nên $x' \geq u$. Điều này chứng tỏ $infimumLH(\gamma hu) \geq u$ hay $\phi x \geq u$, theo Định lý 3.1.

b) Trường hợp $hu \leq u$: Xét giá trị bất kỳ $x' \in LH(x) = LH(\gamma hu)$. Khi đó x' có dạng $x' = \delta\gamma hu$. Vậy nên, theo Mệnh đề 1.2, $x' \leq u$, $\forall x' \in LH(x)$. Điều này cho ta khẳng định $supremumLH(x) \leq u$, hay $\sigma x \leq u$. Đây là điều cần chứng minh. ■

Định lý 3.8. (Tính chất "tịnh tiến" với sự có mặt của σ và ϕ). *Giả sử* $h,\ k \in LH_i$ *và* $x = \delta hu$, $y = \delta ku$. *Khi đó bất đẳng thức* $hu \leq ku$ *kéo theo* $\sigma x \leq \sigma y$ *và* $\phi x \leq \phi y$.

Chứng minh.

Vì $hu \leq ku$, theo Mệnh đề 1.2(i), ta có $\delta' hu \leq \delta' ku$, với mọi xâu gia tử δ'. Xét $z \in LH(x)$ bất kỳ, z có dạng biểu diễn $z = \gamma\delta hu$ và theo trên ta suy ra $z = \gamma\delta hu \leq \gamma\delta ku \in LH(y)$. Theo Định lý 3.1 ta có $z \leq \sigma y$, $\forall z \in LH(x)$. Do đó, từ Tiên đề (L3), ta thu được $\sigma x \leq \sigma y$.

Một cách đối ngẫu ta có thể chứng minh được rằng $\phi x \leq \phi y$. ■

Bổ đề 3.1. *Với mọi* $x \in LH(G)$,

$$\sigma x = supremum\{V^n ox:\ o \in UOS,\ ox \geq x,\ n = 1, 2, ...\} \ \text{ và}$$

$$\phi x = infimum\{V^n ox:\ o \in UOS,\ ox \leq x,\ n = 1, 2, ...\},$$

Lưu ý rằng V *là positive đối với cả hai toán tử đơn vị trong* UOS.

Chứng minh. Có thể thấy bổ đề dễ dàng suy ra từ Mệnh đề 1.1(i) và Định lý 3.1. ■

Bổ đề 3.2. *Giả sử* $h_1,\ k \in LH_i$, $x = \delta h_1 u$ *và* $y = \delta ku$. *Khi đó,* $LH(x)$ *là hữu hạn khi và chỉ khi* $LH(y)$ *là hữu hạn. Hay một cách tương đương,* $\sigma x \notin LH(x)$ *khi và chỉ khi* $\sigma y \notin LH(y)$.

Chứng minh. Bổ đề là hệ quả của trực tiếp của Mệnh đề 1.3. ■

Bổ đề 3.3. *Giả sử* $h_1,\ k \in LH_i$ *và* $x = \delta h_1 u$, $y = \delta ku$ *và* $h_1 u < ku$. *Khi đó nếu* $\sigma x \neq \sigma y$, *thì tồn tại* $z \in LH(h_1 u)$ *sao cho* $\sigma x \leq z$. *Hơn nữa ta có thể tìm được* z *trong các phần tử như vậy sao cho hoặc* $\sigma x = z$, *hoặc* $\sigma x = \phi z$.

Chứng minh. Giả sử $\delta = h_p h_{p-1}...h_2$. Có hai khả năng:

1) Có tồn tại $j \geq 2$ sao cho $h_j \neq V$ và giả sử rằng j là chỉ số lớn nhất trong các chỉ số như vậy.

a) Xét trường hợp $Vh_j x(j) \leq h_j x(j)$, trong đó ta ký hiệu $x(j)$ là khúc hậu tố độ dài j trong biểu diễn của x đối với u, $x = h_p h_{p-1}...h_1 u$. Vậy $x = V^{p-j} h_j...h_1 u$. Vì V positive với chính V, nên ta có $x = Vx(p) \leq x(p) = h_{p-1}...h_1 u$. Giả sử $V \in LH_i^+$. Khi đó có tồn tại $k \in LH_{i-1}^+$ và do đó $Vx(p) \leq kx(p)$. Theo Tiên đề (L5), ta có $\sigma Vx(p) = \phi kx(p)$. Vậy $z = kx(p)$ thoả mãn bổ đề.

b) Xét trường hợp $Vh_j x(j) > h_j x(j)$. Khi đó, do V positive với chính V, nên theo Bổ đề 3.1 ta suy ra $\sigma x = \sigma Vh_j x(j) = \sigma h_j x(j)$.

+ Giả sử $h_j \in LH_i^+$. Do vậy $h_j < V$ và có tồn tại $k_j \in LH_{i+1}^+$ và khi đó $h_j x(j) \leq k_j x(j)$. Theo Tiên đề (L5), $\sigma h_j x(j) = \phi k_j x(j) = \sigma x$. Vậy có thể chọn $z = k_j x(j)$.

+ Giả sử $h_j \in LH_i^-$. Nếu $h_j = L$, thì do V là positive đối với h_j, ta suy ra $x(j) \leq h_j x(j) \leq V h_j x(j)$, vàcũng theo Bổ đề 3.1, $\sigma x = \sigma h_j x(j)$. Ta xét đến h_{j-1}.

Nếu $h_j = L$ negative đối với h_{i-1}, thì $h_{j-1}x(j-1) \leq h_j h_{j-1} x(j-1) \leq x(j-1)$. Khi đó luôn tồn tại $k_{j-1} \in LH_{i-1}^+$ (lưu ý rằng với $i - 1 = 0$, $LH_0^+ = \{I\}$ và $\phi Ix(j-1) = x(j-1)$) và ta có $h_{j-1}x_{(j-1)} \leq k_{j-1}x(j-1)$. Kết hợp Bổ đề 3.1 với Tiên đề (L5), ta suy ra $\sigma h_{j-1}x(j-1) = \sigma L h_{j-1} x(j-1) = \sigma x = \phi k_{j-1} x(j-1)$.

Nếu $h_j = L$ là positive đối với h_{j-1}, thì $x(j-1) \leq h_{j-1}x(j-1) \leq L h_{j-1} x(j-1)$. Vì L là negative đối với L, nên $h_{j-1} \neq L$ và khi đó luôn tồn tại $k_{j-1} \in LH_{i+1}^-$. Vậy $h_{j-1}x(j-1) \leq k_{j-1}x(j-1)$ và tương tự như trên ta có $\sigma h_{j-1} x(j-1) = \sigma L h_{j-1} x(j-1) = \sigma x = \phi k_{j-1} x(j-1)$.

Bây giờ ta cần chứng minh cho trường hợp $h_j \neq L$. Rõ ràng là $h_j \neq I$, do đó trong mọi trường hợp luôn luôn tồn tại k_j thuộc lớp phân bậc kế cận của LH_{j-1}^- sao cho $h_j x(j) \leq k_j x(j)$. Vì $V h_j x(j) > h_j x(j)$ nên suy luận tương tự như trên ta thu được $\sigma x = \phi k_j x(j)$.

2) Xét trường hợp ngược lại, tức là $h_j = V$ với mọi chỉ số $j \geq 2$ và $x = V^{p-1} h_1 u$. Nếu $V h_1 u \geq h_1 u$, thì theo Bổ đề 3.1, $\sigma x = \sigma h_1 u$. Theo Bổ đề 3.2, nếu $LH(h_1 u)$ là vô hạn thì $LH(ku)$ cũng vậy, và do đó $\sigma h_1 u = \sigma ku = \sigma V^{p-1} ku = \sigma y$, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $LH(h_1 u)$ là hữu hạn và do đó theo Bổ đề 3.1, có tồn tại một n sao cho $\sigma h_1 u = V^n o h_1 u$, tức là có thể chọn $z = V^n o h_1 u$.

Nếu $V h_1 u \leq h_1 u$ thì $x = V^{p-1} h_1 u = V x(p) \leq x(p)$. Lập luận tương tự như trường hợp a) ở trên, ta thu được $\sigma V x(p) = \phi k x(p)$.

Như vậy, Bổ đề được hoàn toàn chứng minh. ■

Định lý 3.9. *Giả sử* $h, k \in LH_i$ *và* $x = \delta hw$, $y = \delta kw$ *và* $hw < kw$. *Khi đó nếu* $\sigma x \neq \delta y$, *thì với mọi* $v \in LH(kw)$, *mà* $v \not> \sigma y$, *ta có* v *và* σx *không sánh được, và với mọi* $u \in LH(hw)$, *mà* $u \not< \sigma x$, *ta có* u *và* σy *cũng không sánh được.*

Một phát biểu tương tự cho toán tử ϕ cũng đúng, nghĩa là nếu $\phi x \neq \phi y$, thì với mọi $v \in LH(kw)$, mà $v \not> \phi y$, ta có v và ϕx không sánh được, và với mọi $u \in LH(hw)$, mà $u \not< \phi x$, ta có u và ϕy cũng không sánh được.

Chứng minh.

Theo Định lý 3.8, ta có $\sigma x < \sigma y$. Lấy một phần tử bất kỳ $v \in LH(kw)$, mà $v \not> \sigma y$, v sẽ có dạng $v = \delta' kw$. Ta giả sử phản chứng là σx và v là sánh được. Khi đó có ba khả năng.

Một là $\sigma x > v$. Theo Bổ đề 3.3, có tồn tại $z \in LH(hw)$ sao cho $z \geq \sigma x$ và do đó $z > v$. Nếu $z \leq \delta' hw$ thì $\sigma x \leq z \leq \delta' kw = v$ và ta gặp mâu thuẫn. Vậy $z \not\leq \delta' hw$. Nhưng theo Mệnh đề 1.2(i), ta có $\delta' hw \leq \delta' kw$ và một phần tử z như trên sẽ không sánh được với v. Ta gặp mâu thuẫn. Như vậy khả năng $\sigma x > v$ không thể xảy ra.

Hai là $\sigma x \leq v$. Trường hợp 1: $\exists z \in LH(y)$, $v < z$. Giả sử $z = \delta' \delta kw$. Theo Mệnh đề 1.2(i) ta có $\delta' \delta hw \leq \delta' \delta kw$ và v không sánh được với z. Điều này mâu thuẫn với $\delta' \delta hw \leq \sigma x < v$. Trường hợp 2: $\forall z \in LH(y)$, $z \leq v$. Theo (L3), $\sigma y \leq v$, mâu thuẫn với giả thiết đối với v. Trường hợp 3: $\exists z = \delta' \delta kw \in LH(y)$, z và v không sánh được. Theo Mệnh đề 1.2 (i), $\delta' \delta hw \leq \delta' \delta kw$ và v không sánh được với $\delta' \delta hw$, mâu thuẫn với $\delta' \delta hw \leq \sigma x \leq v$.

Như vậy cả hai khả năng trên đều dẫn đến mâu thuẫn, do đó σx và v không sánh được với nhau.

Bây giờ ta chứng minh cho trường hợp $u \in LH(hw)$, mà $u \not\leq \sigma x$. Khi đó $u \not\leq \delta' \delta hw$, với phần tử bất kỳ $\delta' \delta hw \in LH(x)$. Theo Mệnh đề 1.2(i) ta có $\delta' \delta hw \leq \delta' \delta kw$ và u không sánh được với $\delta' \delta kw$. Vì vậy $u \not> \sigma y > \delta' \delta kw$.

Giả sử phản chứng là $u < \sigma y$. Xét $z \in LH(hw)$ mà $\sigma x \leq z$. Nếu $u \leq z$, với mọi z như vậy, thì theo Bổ đề 3.3, có tồn tại z' sao cho $u \leq \phi z' = \sigma x$. Ta gặp mâu thuẫn với giả thiết đối với u. Do vậy có tồn tại một $z = \gamma hw \in LH(hw)$ sao cho $u \not\leq z$. Theo Mệnh đề 1.2(i), $\gamma hw \leq \gamma kw$ và u không sánh được với γkw. Vì σ, ϕ được xác định chỉ bởi quan hệ thứ tự nên dựa trên Mệnh đề 1.3(ii), từ $\sigma x \leq \gamma hw$, ta suy ra $\sigma y \leq \gamma kw$. Vậy ta lại có $u < \gamma kw$ và ta gặp mâu thuẫn.

Định lý hoàn toàn được chứng minh. ■

REFERENCES

[1] Nguyen Hai Chau, *Some problems in designing a spesific computer network and network chains problem with fuzzy reasoning technique,* Dr. Dissertations. (in Vietnamese).

[2] Nguyen Cat Ho, Fuzziness in Structure of Linguistic Truth Values: A Foundation for Development of Fuzzy Reasoning, *Proc. of ISMVL* **87,** Boston, USA, IEEE Computer Society Press, New York, 1987, 326–335.

[3] N. Cat Ho and W. Wechler, Hedge algebras: an algebraic approach to structures of sets of linguistic domains of linguistic truth variable, *Fuzzy Sets and Systems,* **35** (3) (1990), 281–293.

[4] N. Cat Ho and W. Wechler, Extended hedge algebras and their application to Fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems,* **52** (1992), 259–281.

[5] Nguyen Cat Ho, Tran Thai Son, On distance between values of linguistic variable based on the structure of hedge algebras. *Journal of Informatics and Cybernetics,* **11** (1) (1995) (in Vietnamese).

[6] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam, Symmetrical RHA and its application to fuzzy logic, *Proc. of the NCST of Vietnam,* **10** (2) (1998), 9–20.

[7] N. Cat Ho and H. Van Nam, *A theory of refinement structure of hedge algebras and its application to linguistic-valued fuzzy logic.* In D. Niwinski & M. Zawadowski (Eds), *Logic, Algebra and Computer Science,* Banach Center Publications (PWN - Polish Scientific Publishers), **46,** (1999).

[8] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam, Ordered Structure-Based Semantics of Linguistic Terms of Linguistic Variables and Approximate Reasoning, *AIP conference proceedings on Computing Anticipatory Systems, CASYS 99 Third International Conference,* (98–116).

[9] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam, T.D Khang and L.H. Chau, Hedge Algebras, Linguistic-valued Logic and their Application to Fuzzy Reasoning, Inter. *J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System,* **7** (4) (1999), 347–361.

[10] Nguyen Cat Ho, Huynh Van Nam, Towards an Algebraic Foundation for a Zadeh Fuzzy Logic, *Fuzzy Set and System,* **129** (2002), 229–254.

[11] Nguyen Cat Ho, T.T. Son, T.D. Khang, L.X. Viet, Fuzziness Measure, Quantified Semantic Mapping And Interpolative Method of Approximate Reasoning in Medical Expert Systems, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học,* **18** (3) (2002), 237–252.

Nhận bài ngày 02 - 11 - 2002