Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 14, S. 4 (1998) (31–40)

PHÉP KÉO THEO TRÊN DÀN CON X_2 CỦA DÀN PHÂN PHỐI RHA

ĐÀO THU HÒA

Abstract. Implication operators on lattices play a considerable role in studying reasoning methods and hence they have been examined extensively by many authors (see [4]). It is shown in [5] that refined hedge algebras are an algebras foundation to investigate linguistic-valued logic and reasoning methods. So, the main aim of the paper is to examine implication operators in a ristricted class of refined hedge algebras and to establish some formulas to compute these operators.

MỞ ĐẦU

Chúng ta đã biết một cấu trúc mịn hóa của đại số gia tử (viết tắt là RHA) với tính PN-homogeneous và tập các phần tử sinh nguyên thủy được sắp thứ tự tuyến tính, là một dàn phân phối [3]. Việc nghiên cứu tiếp theo, xa hơn về lập luận ngôn ngữ, dựa trên cấu trúc RHA của các biến ngôn ngữ không thể thiếu vai trò quan trọng của phép kéo theo trên dàn.

Người ta gọi là phép kéo theo trên dàn (đầy đủ) L, ánh xạ $\varphi : L \times L \to L$ xác định bởi

$$\varphi(a,b) = \sup\{d \in L : a \wedge d \leq b\}.$$

Chúng ta xét một cấu trúc mịn hóa của đại số gia tử RHA:

$AX = (X, G, LH, \leq)$, ở đó G là tập hữu hạn sắp thứ tự bộ phận, $LH = LH^+ \cup LH^-$.

$LH^+ = \bigcup_{i=1}^{N^+} LH_i^+$ là dàn phân phối hữu hạn sinh từ $H^+ + I$.

$LH^- = \bigcup_{i=1}^{N^-} LH_i^- b$ là dàn phân phối hữu hạn sinh từ $H^- + I$.

$LH_i^C + I$ thỏa mãn điều kiện (C_0) như sau:

(C_0) $x > y$ hoặc $x < y$ với mọi $x \in LH_i^C$, $y \in LH_j^C$ $(i \neq j)$.

LH_i^C là dàn phân phối tự do sinh bởi các phần tử không sánh được của H_i^C. (Ký hiệu "C" được hiểu là "$+$" hoặc "$-$"). Thêm nữa $(H(G), G, H, \leq)$ là một đại số gia tử PN-homogeneous.

Kí hiệu X_n là tập những phần tử $\alpha = h_m...h_1x \in X$, trong đó: $x \in G$, $h_i \in LH$ $(i = 1, ..., m)$ và $m \leq n$. Ta có nhận xét rằng tập X_n hoàn toàn không thay đổi khi nói X_n là tập những phần tử $\alpha = h_n...h_1x \in X$, trong đó: $x \in G$, và $h_i \in LH + I$ và nếu $\exists j \in \{1, ..., n\}$ sao cho $h_j = I$ thì $h_{j'} = I$ với mọi $j' : j \leq j' \leq n$. Khi đó X_n là dàn con phân phối hữu hạn của dàn phân phối X.

Trong bài này chúng tôi trình bày việc xác định phép kéo theo φ_1 trên dàn con X_1, φ_2 trên dàn con X_2 của dàn RHA. Toàn bài được chia làm 4 phần:

I. Một vài tính chất cơ bản của RHA.

II. Phép kéo theo φ trong dàn $LH^C + I$ và mối liên hệ giữa thứ tự trong $LH^C + I$ và thứ tự trong X_2.

III. Thiết lập công thức tính $\varphi(a, b)$ qua φ_1 và $\varphi_2(a, b)$ qua φ_1 với $a \in X_1$.

IV. Thiết lập công thức tính $\varphi_2(a, b)$ với $a, b \in X_2$ và $a \notin X_1$.

Công trình này được thực hiện với sự giúp đỡ của Chương trình Quốc gia về nghiên cứu cơ bản

I. MỘT VÀI TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA RHA

Sau đây chúng ta sẽ nhắc lại một vài tính chất cơ bản nhất của cấu trúc RHA.

Định lý 1 [3]. *Giả sử $x = h_n \dots h_1 u$ và $y = k_m \dots k_1 u$ là hai biểu diễn chuẩn tắc của x và y đối với u. Khi đó tồn tại chỉ số $j \le \min\{m, n\} + 1$ sao cho $h_{j'} = k_{j'}$ với mọi $j' < j$ và*

(1) $x < y$ nếu và chỉ nếu một trong các điều kiện sau đây đúng

(i) $h_j x_j < k_j x_j$ và $\delta k_j x_j < \delta' k_j x_j$ hoặc $\delta h_j x_j < \delta' h_j x_j$ nếu $\exists i \in SI^C$ sao cho $h_j, k_j \in LH_i^C$, ở đây: $x_j = h_{j-i} \dots h_1 U$, $\delta = h_n \dots h_{j+1}$, $\delta' = k_n \dots k_{j+1}$.

(ii) $h_j x_j < k_j x_j$ trong các trường hợp còn lại.

(2) $x = y$ nếu và chỉ nếu $m = n = j$ và $h_j x_j = k_j x_j$.

(3) x và y là không sánh được nếu và chỉ nếu $\exists i \in SI^C$ sao cho $h_j, k_j \in LH_i^C$ và một trong các điều kiện sau đây đúng

(i) $h_j x_j$ và $k_j x_j$ là không sánh được.

(ii) $h_j x_j < k_j x_j$ và $\delta k_j x_j \nleq \delta' k_j x_j$.

(iii) $h_j x_j > k_j x_j$ và $\delta' h_j x_j \nleq \delta h_j x_j$.

Định lý 2 [5]. *Giả sử $AX = (X, G, LH, \le)$ là một RHA. Nếu G là một tập sắp thứ tự tuyến tính thì AX là một dàn. Hơn nữa, với hai phần tử không sánh được bất kì x và y trong X, tồn tại hai toán tử tương thích h và k trong LH_i^C, với $i \in SI^C$ và phần tử $w \in LH(a)$, $a \in G$, sao cho $x = \delta h w$, $y = \delta' k w$, δ, $\delta' \in LH^*$ và*

$$\sup\{x, y\} = \begin{cases} \sup\{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\} & \text{nếu } hw > w \\ \sup\{\delta(h \wedge k)w, \delta'(h \wedge k)w\} & \text{nếu } hw < w \end{cases}$$

$$\inf\{x, y\} = \begin{cases} \inf\{\delta(h \wedge k)w, \delta'(h \wedge k)w\} & \text{nếu } hw > w \\ \inf\{\delta(h \vee k)w, \delta'(h \vee k)w\} & \text{nếu } hw < w \end{cases}$$

Hệ quả sau là một trường hợp đặc biệt của Định lý 2 (khi $|\delta| = \emptyset$).

Hệ quả. *Giả sử $a = h_1 x$, $b = k k_1 x$ là những biểu diễn chuẩn tắc của a và b đối với $x \in X$ và $h_1, k_1 \in LH_i^C$. Ta có:*

$$a \wedge b = \begin{cases} \inf\{(h_1 \wedge k_1)x, k(h_1 \wedge k_1)x\} & \text{nếu } h_1 x > x \\ \inf\{(h_1 \vee k_1)x, k(h_1 \vee k_1)x\} & \text{nếu } h_1 x < x \end{cases}$$

$$a \vee b = \begin{cases} \sup\{(h_1 \vee k_1)x, k(h_1 \vee k_1)x\} & \text{nếu } h_1 x > x \\ \sup\{(h_1 \wedge k_1)x, k(h_1 \wedge k_1)x\} & \text{nếu } h_1 x < x \end{cases}$$

II. PHÉP KÉO THEO TRONG DÀN CÁC TOÁN TỬ $LH_i^C + I$ VÀ MỘT SỐ MỐI LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ TRONG $LH_i^C + I$ VÀ TRONG X_2

Trước tiên chúng ta nhắc lại định nghĩa về phép kéo theo trên một dàn - một khái niệm quan trọng và quen biết.

Định nghĩa. Giả sử L là một dàn đầy đủ. Phép toán hai ngôi φ trên L xác định bởi $\varphi(a, b) = \sup\{d \in L : a \wedge d \le b\}$ được gọi là phép kéo theo trên L. Với a, b tùy ý thuộc L, phần tử $\varphi(a, b) \in L$ được gọi là a kéo theo b.

Bây giờ, chúng ta xét cấu trúc mịn hóa của đại số gia tử (RHA) $AX = (X, G, LH, \le)$, trong đó tập các phần tử sinh nguyên thủy G là tập hữu hạn, được sắp thứ tự tuyến tính. Chúng ta sẽ tìm cách xác lập phép kéo theo φ_2 trên dàn X_2, nghĩa là xác định $\varphi_2(a, b)$ (a kéo theo b) với a tùy ý thuộc X_2.

Giả sử φ là phép kéo theo trên dàn L. Từ định nghĩa ta có ngay $\varphi(a, b) \geq b$ (do $a \wedge b \leq b$) và $\varphi(a, b) = 1$ nếu $a \leq b$ (với a, b tùy ý thuộc L và 1 là phần tử đơn vị của dàn).

Chúng ta đã biết rằng với mọi $i \in SI^C$, LH_i^C là một dàn hữu hạn. Ta gọi φ^i là phép kéo theo trên dàn LH_i^C và φ là phép kéo theo trên dàn hữu hạn $LH^C + I$. Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1. *Giả sử h và k là hai phần tử túy ý trong $LH^C + I$.*

(1) Nếu $h \leq k$ thì $\varphi(h, k) = U \in UOS$.

(2) Nếu $h \not\leq k$ thì:

(i) $\varphi(h, k) = k$ nếu $\nexists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$,

(ii) $\varphi(h, k) = \varphi^i(h, k) \in LH_i^C$ nếu $h, k \in LH_i^C$.

Chứng minh: (1): Rõ ràng.

(2): Giả sử $h \not\leq k$. Ta có nhận xét: Với k' là phần tử tùy ý trong $LH^C + I$ và $k < k'$ thì từ $k' < h$ suy ra $h \wedge k' = k' \not\leq k$ và từ $h < k'$ suy ra $h \wedge k' = h \not\leq k$. Do đó nếu $k < k'$ và $h \wedge k' \leq k$ thì h và k' là không sánh được. Đặt $\widetilde{k} = \varphi(h, k)$.

(i) Giả sử rằng $\nexists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$ và giả sử $\varphi(h, k) \neq k$. Khi đó ta có $k < \widetilde{k}$ và $h \wedge \widetilde{k} \leq k$. Theo nhận xét trên ta có h và $\widetilde{k}$ không sánh được, do đó $\exists i \in SI^C : h, \widetilde{k} \in LH_i^C$. Theo giả thiết, $k \in LH_j^C$ $(j \neq i)$ và $k < h$. Ta có $h \wedge \widetilde{k} \in LH_i^C$ cho nên $k < h \wedge \widetilde{k}$, điều này trái giả thiết.

(ii) Giả sử $\exists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$. Ta có $\widetilde{k} \geq k$ nên theo nhận xét trên $\widetilde{k} \in LH_i^C$, nghĩa là ta có $\widetilde{k} = \varphi(h, k) = \varphi^i(h, k) \in LH_i^C$. □

Chúng ta đã có $LH^C + I$ là một dàn phân phối hữu hạn với $\wedge$, $\vee$, và quan hệ $\leq$. Trên tập hợp $LH^C + I$, xác định $\underset{*}{\wedge}$, $\underset{*}{\vee}$ và $\underset{*}{\leq}$ như sau:

$$h \underset{*}{\wedge} k = h \vee k,\ h \underset{*}{\vee} k = h \wedge k \text{ và } h \underset{*}{\leq} k \Leftrightarrow k \leq h.$$

Khi đó $(LH^C + I, \underset{*}{\wedge}, \underset{*}{\vee})$ cũng là một dàn phân phối hữu hạn và có quan hệ thứ tự bộ phận $\underset{*}{\leq}$. Gọi φ_* là phép liên hợp của φ. Giữa φ và φ_* có mối quan hệ "đối ngẫu". Chẳng hạn ta có: $\varphi_*(h, k) = \sup\{\widetilde{k} : h \underset{*}{\wedge} \widetilde{k} \underset{*}{\leq} k\} = \inf\{\widetilde{k} : h \vee \widetilde{k} \geq k\}$.

Do $k \underset{*}{\leq} \varphi_*(h, k)$, ta có: $\varphi_*(h, k) \leq k$. Bằng "đối ngẫu" chúng ta thu được mệnh đề sau

Mệnh đề 1'. *Giả sử h và k là hai phần tử tùy ý thuộc $LH^C + I$. Khi đó:*

(1) Nếu $h \geq k$ thì $\varphi_*(h, k) = I$.

(2) Nếu $h \not\geq k$ thì

(i) $\varphi_*(h, k) = k$ nếu $\nexists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$,

(ii) $\varphi_*(h, k) = \varphi_*^i(h, k) \in LH_i^C$ nếu $\exists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$.

Để xác định phép kéo theo φ_2 trên dàn X_2, chúng ta cần một số bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Giả sử $a = hh_1x$, $b = kk_1x$ là hai phần tử túy ý thuộc X_2 thỏa mãn $a \not\leq b$ và $\{h_1, k_1\} \not\subseteq LH_i^C$ với $\forall i \in SI^C$. Khi đó đối với mọi $a' = h'h'_1x$, $b' = k'k'_1x$ thỏa mãn $h_1, h'_1 \in LH_i^{C_1}$ và $k_1, k'_1 \in LH_j^{C_2}$ ta có $a' > b'$.*

Chứng minh: Trước tiên chúng ta giả sử rằng: $h_1 \in LH_i^{C_1}$, $k_1 \in LH_j^{C_2}$ với $C_1 \neq C_2$. Do đó chúng ta suy ra a, b là sánh được. Do $a \not\leq b$ nên ta có $a = hh_1x > x > kk_1x = b$. Theo giả thiết $h_1, h'_1 \in LH_i^{C_1}$, $k_1, k'_1 \in LH_j^{C_2}$, áp dụng tính tương thích của các gia tử trong LH^C, từ bất đẳng thức trên ta có: $a' = h'h'_1x > x > k'k'_1x$. Bây giờ chúng ta giả thiết: $C_1 = C_2 = C$, tức là $h_1 \in LH_i^C$, $k_1 \in LH_j^C$. Do $a \not\leq b$ nên $i > j$ nếu $h_1x > x$ và $i < j$ nếu $h_1x < x$. Ta giả sử $h_1x > x$, khi đó ta có $i > j$ và $h_1 > k_1$. Theo giả thiết, $h_1, h'_1 \in LH_i^C$ và $k_1, k'_1 \in LH_j^C$, do đó

$h_1'x > x$, $k_1'x > x$. Vì $i > j$ ta suy ra $h_1'x > k_1'x$. Theo Định lý 1 ta có $a' = h'h_1'x > k'k_1'x = b'$. Đối với trường hợp $h_1x < x$, chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Từ Bổ đề 1 chúng ta có ngay hệ quả sau:

Hệ quả 1. *Giả sử các phần tử $a = hh_1x$, $b = kk_1x$, $a' = h'h_1'x$, $b' = k'k_1'x$ thỏa mãn các điều kiện $a \not\leq b$, $\nexists i \in SI^C : h_1, k_1 \in LH_i^C$ và ngoài ra $h_1, h_1' \in LH_i^{C_1}$, $k_1, k_1' \in LH_j^{C_2}$. Khi đó $a' > b$ và $a > b'$.*

Bổ đề 2. *Giả sử $a = hh_1x$, $b = kk_1y$, $d = gg_1z$ là những phần tử thuộc X_2 thỏa mãn điều kiện: $a \not\leq b$, $b < d$ và $a \wedge d \leq b$. Khi đó: $x = y = z$ và $\exists i \in SI^C$ sao cho $h_1, k_1, g_1 \in LH_i^C$.*

Chứng minh: Chúng ta đã có G là tập sắp thứ tự tuyến tính và x, y, z là những phần tử thuộc G. Tương tự như nhận xét đã được chứng minh trong Bổ đề 1, ta có a, d không sánh được, do đó $x = z$ và $\exists i \in SI^C : h_1, g_1 \in LH_i^C$. Giả sử $y \neq z$, do $b < d$ ta có $y < z = x$. Khi đó $b = kk_1y < a \wedge d \in LH[x]$. Điều này trái với giả thiết. Vậy ta có $x = y = z$.

Theo chứng minh trên ta có: $g_1, h_1 \in LH_i^C$, khi đó $a \wedge d = h'h_1'x$ trong đó $h_1' \in LH_i^C$. Ta giả sử $k_1 \notin LH_i^C$, áp dụng Hệ quả 1 với giả thiết $b = kk_1x < d = gg_1x$ và $g_1, h_1 \in LH_i^C$, ta có: $a \wedge d > b = kk_1x$. Điều này trái giả thiết. Do đó ta có $h_1, k_1, g_1 \in LH_i^C$. □

III. THIẾT LẬP CÔNG THỨC TÍNH $\varphi_1(a, b)$ QUA φ VÀ $\varphi_2(a, b)$ QUA φ_1 VỚI $a \in X_1$

Sau đây chúng ta sẽ xác định phép kéo theo φ_1 trên dàn X_1, trong đó như đã trình bày, $X_1 = \{hx \mid x \in G, h \in LH + I\}$ là một dàn con phân phối hữu hạn của dàn X. Phép kéo theo φ_1 được xác định nhờ mệnh đề sau:

Mệnh đề 2. *Giả sử $a = hx$, $b = ky$ là hai phần tử túy ý thuộc X_1. Khi đó*

(1) Với $a \leq b$ ta có $\varphi_1(a, b) = 1_{X_1}$.

(2) Với $a \not\leq b$, ta có:

(i) Nếu $x \neq y$, hoặc $x = y$ và $\nexists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$ thì $\varphi_1(a, b) = b$.

(ii) Nếu $x = y$ và $\exists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$ thì

$$\varphi_1(a, b) = \begin{cases} \varphi(h, k)x & \text{khi } hx > x \text{ hoặc } kx > x \\ \varphi_*(h, k)x & \text{khi } hx < x \text{ hoặc } kx < x \end{cases}$$

Chứng minh: (1) là hiển nhiên. Ta chứng minh (2) với giả thiết $a \not\leq b$:

(i) Giả thiết hoặc $x \neq y$ hoặc $x = y$ và $\nexists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$. Đặt $d = \varphi_1(a, b) \in X_1$ và giả sử phản chứng là $d \neq b$. Theo định nghĩa của phép kéo theo ta có $b < d$ và $a \wedge d \leq b$. Điều này mâu thuẫn với khẳng định của Bổ đề 2. Vậy $d = b$, nghĩa là: $\varphi_1(a, b) = b$.

(ii) Xét trường hợp $a = hx$, $b = kx$ và $\exists i \in SI^C : h, k \in LH_i^C$. Giả sử rằng $hx > x$, khi đó ta cũng có $kx > x$. Đặt $\widetilde{k} = \varphi(h, k) \in LH^C + I$ và $d = \widetilde{k}x \in X_1$. Theo Mệnh đề 1, $\widetilde{k} \in LH_i^C$ và $d = \widetilde{k}x \geq kx = b > x$. Áp dụng Định lý 2 ta có: $a \wedge d = (h \wedge \widetilde{k})x$. Theo giả thiết và định nghĩa phép kéo theo, $kx > x$ và $h \wedge \widetilde{k} \leq k$, do đó $a \wedge d = (h \wedge \widetilde{k})x \leq kx = b$. Bây giờ đặt $d_1 = \varphi_1(a, b) \in X_1$, theo chứng minh trên ta có $d \leq d_1$. Giả sử $d \neq d_1$, khi đó $b \leq d < d_1$, từ đó $a \not\leq b$ và $a \wedge d_1 \leq b$. Áp dụng Bổ đề 2 ta có: $d_1 = gx$ với $g \in LH_i^C$. Hơn nữa, $a \wedge d = (h \wedge g)x \leq kx = b$. Vì $h \wedge g \in LH_i^C$ và $(h \wedge g)x > x$ nên $h \wedge g \leq k$. Từ định nghĩa của phép kéo theo suy ra $g \leq \widetilde{k} = \varphi(h, k)$. Do $g(x) > x$ nên $d_1 = gx \leq \widetilde{k}x = d$, điều này trái với giả thiết trên. Vậy $d = d_1$, nghĩa là $\varphi_1(a, b) = \varphi(h, k)x$. Trường hợp $hx < x$ hoặc $kx < x$ chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Mệnh đề 3. *Giả sử $a = hh_1x$, $b = kk_1y$ là những phần tử thuộc X_2. Khi đó*

(1) Với $a \leq b$ ta có $\varphi_2(a, b) = 1_{X_2}$.

(2) Với $a \not\leq b$ đồng thời hoặc $x \neq y$, hoặc $x = y$ và $\nexists i \in SI^C$ sao cho h_1, $k_1 \in LH_i^C$. Khi đó $\varphi_2(a, b) = b$.

Chứng minh: Khẳng định (1) là hiển nhiên do định nghĩa của phép kéo theo. Để chứng minh (2) chúng ta đặt $d = \varphi_2(a, b) \in X_2$ và giả sử rằng $d \neq b$, khi đó từ định nghĩa của phép kéo theo ta có $b < d$ và $a \wedge d \leq b$. Từ đó áp dụng Bổ đề 2 ta rút ra điều mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $d = b$, nghĩa là $\varphi_2(a, b) = b$. Mệnh đề được chứng minh. □

Trước khi phát biểu Mệnh đề 4, chúng ta nhớ lại rằng LH_i^C là một dàn hữu hạn với mỗi $i \in SI^C$, và φ^i là phép kéo theo trên dàn LH_i^C, φ_*^i là phép kéo theo "đối ngẫu" với φ^i trên dàn LH_i^C.

Mệnh đề 4. *Giả sử $a = h_1x$, $b = kk_1x$ là những phần tử thuộc X_2, thỏa mãn điều kiện $a \not\leq b$ và $\exists i \in SI^C$ sao cho h_1, $k_1 \in LH_i^C$. Khi đó:*

$$\varphi_2(a, b) = \begin{cases} Ud_1 & \text{nếu } kk_1x \geq k_1x \\ kd_1 & \text{nếu } kk_1x < k_1x \end{cases}$$

trong đó: $U \in UOS$ và $Uk_1x > k_1x$, và

$$d_1 = \begin{cases} \varphi^i(h_1, k_1)x & \text{nếu } h_1x > x \text{ hoặc } k_1x > x \\ \varphi_*^i(h_1, k_1)x & \text{nếu } h_1x < x \text{ hoặc } k_1x < x \end{cases}$$

Chứng minh: Theo giả thiết h_1, $k_1 \in LH_i^C$ với $i \in SI^C$, nên $h_1 \neq I$ và $k_1 \neq I$. Mặt khác, theo giả thiết $a \not\leq b$ nên $h_1x \neq x$ và $k_1x \neq x$. Đặt $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1) \in LH_i^C$. Ta giả thiết $h_1x > x$, khi đó $k_1x > x$ và $\widetilde{h}x > x$, vì các toán tử đều nằm trong lớp LH_i^C. Đặt $d = \widetilde{k}\widetilde{h}x$, với

$$\widetilde{k} = \begin{cases} U & \text{nếu } kk_1x \geq k_1x \\ k & \text{nếu } kk_1x < k_1x \end{cases}$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\varphi_2(a, b) = d$. Trước tiên ta chứng minh $a \wedge d \leq b$. Theo trên, ta có $h_1x > x$, $k_1x > x$, $\widetilde{h}x > x$. Áp dụng Định lý 2, ta thu được đẳng thức $a \wedge d = \inf\{(h_1 \wedge \widetilde{h})x, \widetilde{k}(h_1 \wedge \widetilde{h})x\}$. Do $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1)$, ta có $h_1 \wedge \widetilde{h} \leq k_1$ và $x < (h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq k_1x$.

Trong trường hợp $kk_1x \geq k_1x$ ta có $\widetilde{k} = U \in UOS$ và $Uk_1x > k_1x$. Khi đó $\widetilde{k}(h_1 \wedge \widetilde{h})x = U(h_1 \wedge \widetilde{h})x > (h_1 \wedge \widetilde{h})x$, do đó $a \wedge d = (h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq k_1x \leq kk_1x = b$.

Trong trường hợp $kk_1x < k_1x$ ta có $\widetilde{k} = k$ và $(h_1 \wedge \widetilde{h})x > k(h_1 \wedge \widetilde{h})x = \widetilde{k}(h_1 \wedge \widetilde{h})x$, do đó $a \wedge d = \widetilde{k}(h_1 \wedge \widetilde{h})x = k(h_1 \wedge \widetilde{h})x$. Từ đó ta có $a \wedge d = k(h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq kk_1x = b$.

Như vậy ta đã chứng minh được rằng $a \wedge d \leq b$. Mặt khác, ta nhận thấy rằng $d \geq b$. Thật vậy, từ cách xác định trên, $\widetilde{h}x \geq k_1x > x$. Hơn nữa, nếu $kk_1x \geq k_1x$ thì $\widetilde{k} = U \in UOS$, $\widetilde{k} \geq k$ và $d = \widetilde{k}\widetilde{h}x \geq \widetilde{k}k_1x \geq kk_1x = b$ và nếu $kk_1x < k_1x$ thì $\widetilde{k} = k$. Vì vậy: $d = \widetilde{k}\,\widetilde{h}x = k\widetilde{h}x \geq kk_1x = b$. Như vậy ta đã chứng minh được $d \geq b$.

Để chứng minh $\varphi_2(a, b) = d$, đặt $d_2 = \varphi_2(a, b) \in X_2$. Theo chứng minh trên $a \wedge d \leq b$ cho nên $d \leq d_2$. Ta giả sử rằng $d \neq d_2$, khi đó $b \leq d < d_2$. Áp dụng Bổ đề 2 ta có $d_2 = gg_1x$ với $g_1 \in LH_i^C$ và do đó $g_1x > x$. Do $d = \widetilde{k}\,\widetilde{h}x < gg_1x = d_2$ suy ra $\widetilde{h}x \leq g_1x$. Vì $\widetilde{h}x > x$ nên $\widetilde{h} \leq g_1$. Mặt khác, do $a \wedge d_2 = \inf\{(h_1 \wedge g_1)x, g(h_1 \wedge g_1)x\} \leq b$ nên $(h_1 \wedge g_1)x \leq k_1x$. Do h_1, $g_1 \in LH_i^C$ và $g_1x > x$ ta có $(h_1 \wedge g_1)x > x$ và $h_1 \wedge g_1 \leq k_1$. Theo giả thiết $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1) \in LH_i^C$, suy ra $g_1 \leq \widetilde{h}$. Kết hợp với chứng minh trên, rút ra $g_1 = \widetilde{h}$, từ đó $d_2 = g\widetilde{h}x$.

Trong trường hợp $kk_1x \geq k_1x$ ta có $\widetilde{k} = U \in UOS$ và $Uk_1x > k_1x$. Do k_1, $\widetilde{h} \in LH_i^C$ nên $U\widetilde{h}x > \widetilde{h}x$. Từ đó $d = \widetilde{k}\widetilde{h}x = U\widetilde{h}x \geq g\widetilde{h}x = d_2$, điều này trái với giả thiết.

Trong trường hợp $kk_1x < k_1x$ ta có $\widetilde{k} = k$. Theo chứng minh trên ta có: $a \wedge d_2 = \inf\{(h_1 \wedge \widetilde{h})x, g(h_1 \wedge \widetilde{h})x\}$ và $a \wedge d_2 \leq b = kk_1x$. Do $(h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq k_1x$ và $kk_1x < k_1x$, nên áp dụng Định lý 1 ta có $(h_1 \wedge \widetilde{h})x \not\leq kk_1x$. Từ đó: $a \wedge d_2 = g(h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq kk_1x = b$. Vì $h_1 \wedge \widetilde{h}$ và k_1 cùng thuộc LH_i^C, áp sụng Định lý 1 ta được: $gk_1x \leq kk_1x < k_1x$.

Vì $k_1, \widetilde{h} \in LH_i^C$ nên $d_2 = g\widetilde{h}x \leq k\widetilde{h}x = \widetilde{k}\widetilde{h}x = d$, điều này trái giả thiết.

Như vậy giả thiết $d \neq d_2$ dẫn đến mâu thuẫn. Nghĩa là ta có $d = d_2$ hay $\varphi_2(a, b) = \widetilde{k}\widetilde{h}x$. Mệnh đề 4 được chứng minh. □

IV. THIẾT LẬP CÔNG THỨC TÍNH $\varphi_2(a, b)$ VỚI $a, b \in X_2$ VÀ $a \notin X_1$

Mệnh đề 5. *Giả sử $a = hh_1x$ và $b = kk_1x$ $(h \neq I)$ là hai phần tử của X_2 sao cho $a \not\leq b$ và $\exists i \in SI^C : h_1, k_1 \in LH_i^C$. Khi đó:*

$$\varphi_2(a, b) = \begin{cases} \overline{\varphi}(h, k)d_1 & \text{nếu } hh_1x > h_1x \\ \overline{\varphi}_*(h, k)d_1 & \text{nếu } hh_1x < h_1x \end{cases}$$

Trong đó

$$d_1 = \begin{cases} \varphi^i(h_1, k_1)x & \text{nếu } h_1x > x \text{ hoặc } k_1x > x \\ \varphi^i_*(h_1, k_1)x & \text{nếu } h_1x < x \text{ hoặc } k_1x < x \end{cases}$$

và

$$\overline{\varphi}_0(h, k) = \begin{cases} \varphi_0(h, k) & \text{nếu } h, k \text{ tương thích} \\ k & \text{nếu } h, k \text{ không tương thích} \end{cases}$$

với "0" được hiểu hoặc là bland, tức là $\overline{\varphi}_0 = \overline{\varphi}$ và $\varphi_0 = \varphi$ hoặc là " $*$ ", tức là $\overline{\varphi}_0 = \overline{\varphi}_*$ và $\varphi_0 = \varphi_*$.

Chứng minh: Theo giả thiết $h_1k_1 \in LH_i^C$ nên $h_1 \neq I$ và $k_1 \neq I$. Do $a \not\leq b$ nên $h_1x \neq x$ và $k_1x \neq x$. Đặt $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1) \in LH_i^C$ và $d_1 = \widetilde{h}x$. Chúng ta giả thiết rằng $h_1x > x$, khi đó $k_1x > x$, $\widetilde{h}x > x$ và $x < (h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq k_1x$. Vì chứng minh cho trường hợp $hh_1x < h_1x$ hoàn toàn tương tự, ta sẽ chỉ trình bày chứng minh mệnh đề cho trường hợp $hh_1x > h_1x$, nghĩa là cần chứng tỏ rằng $\varphi_2(a, b) = \overline{\varphi}(h, k)d_1 = \overline{\varphi}(h, k)\widetilde{h}x$. Đặt $\widetilde{k} = \overline{\varphi}(h, k)$ và $d = \widetilde{k}\widetilde{h}x$. Để chứng minh $\varphi_2(a, b) = d$, trước tiên ta chứng minh rằng $a \wedge d \leq b$. Thật vậy, ta có:

$$a \wedge d = hh_1x \wedge \widetilde{k}\widetilde{h}x = \inf\{h(h_1 \wedge \widetilde{h})x, \widetilde{k}(h_1 \wedge \widetilde{h})x\} \tag{1}$$

Giả sử h, k tương thích. Do $hh_1x > h_1x$ nên $kh_1x > h_1x$ và theo giả thiết của mệnh đề ta có $\widetilde{k} = \overline{\varphi}(h, k) = \varphi(h, k) \geq k$, vì vậy $\widetilde{k}h_1x \geq h_1x$. Nghĩa là ta cũng có h, $\widetilde{k}$ là những phần tử tương thích. Áp dụng Định lý 2 và sau đó là Định lý 1 vào (1) ta thu được $a \wedge d = (h \wedge \widetilde{k})(h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq kk_1x = b$. Như vậy chúng ta đã chứng tỏ được $a \wedge d \leq b$ trong trường hợp h, k tương thích.

Bây giờ, giả sử h, k không tương thích, ta cũng sẽ chứng minh rằng $a \wedge d \leq b$. Do h, k không tương thích và đã có $hh_1x > h_1x$ nên ta có $hh_1x > h_1x > kh_1x$. Trong trường hợp này $\widetilde{k} = k$. Theo giả thiết $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1) \in LH_i^C$, cho nên $h_1, h_1 \wedge \widetilde{h} \in LH_i^C$, từ đó suy ra: $h(h_1 \wedge \widetilde{h})x > (h_1 \wedge \widetilde{h})x > k(h_1 \wedge \widetilde{h})x = \widetilde{k}(h_1 \wedge \widetilde{h})x$. Kết hợp với (1) ta có $a \wedge d = \widetilde{k}(h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq kk_1x = b$. Nghĩa là với mọi h, k ta đều có $a \wedge d \leq b$.

Chúng ta thấy rằng $b \leq d$. Thật vậy, do $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1) \geq k_1$ và $k_1x > x$, nên $k_1x \leq \widetilde{h}x$. Theo giả thiết ta có $hh_1x > h_1x$. Để chứng minh $b \leq d$ chúng ta sẽ lần lượt xét từng trường hợp h, k tương thích và h, k không tương thích.

Nếu h, k tương thích thì từ giả thiết $hh_1x > h_1x$ ta cũng có $kh_1x > h_1x$. Do $h_1, \widetilde{h} \in LH_i^C$ cho nên $k\widetilde{h}x > \widetilde{h}x$. Trường hợp này $\widetilde{k} = \varphi(h, k) \geq k$, nên $d = \widetilde{k}\widetilde{h}x \geq k\widetilde{h}x \geq kh_1x = b$.

Nếu h, k không tương thích thì $\widetilde{k} = k$, và ta có $d = \widetilde{k}\widetilde{h}x = k\widetilde{h}x \geq kk_1x = b$.

Bây giờ để chứng minh $\varphi_2(a, b) = d = \widetilde{k}\widetilde{h}x$, ta đặt $d_2 = \varphi_2(a, b) \in X_2$. Theo chứng minh trên $a \wedge d \leq b \leq d$ suy ra $b \leq d \leq d_2$. Để chứng minh $d = d_2$, giả sử phản chứng $d \neq d_2$, khi đó $d < d_2$ do đó $b < d_2$. Do $a \wedge d_2 \leq b$ và $a \not\leq b$, áp dụng Bổ đề 2 ta có: $d_2 = gg_1x$ với $g_1 \in LH_i^C$. Vì $h_1x > x$ và $h_1, g_1 \in LH_i^C$ cho nên $g_1x > x$. Chúng ta đã giả thiết $d = \widetilde{k}\widetilde{h}x < gg_1x = d_2$ nên suy ra $\widetilde{h}x \leq g_1x$. Vì $\widetilde{h}x > x$ ta có $\widetilde{h} \leq g_1$. Mặt khác, $a \wedge d_2 = \inf\{h(h_1 \wedge g_1)x, g(h_1 \wedge g_1)x\} \leq b = kk_1x$. Ta suy ra: $x < (h_1 \wedge g_1)x \leq k_1x$. Từ đó có $h_1 \wedge g_1 \leq k_1$.

Chúng ta biết rằng $h_1, k_1, g_1 \in LH_i^C$ và $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1) \in LH_i^C$. Cho nên từ $h_1 \wedge g_1 \leq k_1$ ta có $g_1 \leq \widetilde{h}$. Kết hợp với kết quả đã chứng minh trên: $\widetilde{h} \leq g_1$, ta thu được: $g_1 = \widetilde{h}$. Như vậy: $d_2 = g\widetilde{h}x$. Thay $d_2 = g\widetilde{h}x$ vào biểu thức của $a \wedge d_2$, ta thu được

$$a \wedge d_2 = \inf\{h(h_1 \wedge \widetilde{h})x,\ g(h_1 \wedge \widetilde{h})x\} \leq kk_1x = b \tag{2}$$

Do $hh_1x > h_1x$ và $h_1,\ h_1 \wedge \widetilde{h} \in LH_i^C$, suy ra $h(h_1 \wedge \widetilde{h})x > (h_1 \wedge \widetilde{h})x$.

Để chứng tỏ giả thiết $d \neq d_2$ là không thể xảy ra, ta lần lượt xét từng trường hợp h, g tương thích và h, g không tương thích.

Giả sử h, g tương thích, thế thì từ $h(h_1 \wedge \widetilde{h})x > (h_1 \wedge \widetilde{h})x$ ta có $g(h_1 \wedge \widetilde{h})x > (h_1 \wedge \widetilde{h})x$. Khi đó áp dụng Định lý 2 vào (2) ta có $a \wedge d_2 = (h \wedge g)(h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq kk_1x = b$. Vì $k_1,\ h_1 \wedge \widetilde{h} \in LH_i^C$, trên cơ sở Định lý 1 ta suy ra $k_1x < (h \wedge g)k_1x \leq kk_1x$. Do đó $h \wedge g \leq k$. Ta nhận thấy rằng $hh_1x > h_1x$, $kk_1x > k_1x$ và $h_1, k_1 \in LH_i^C$ cho nên h, k tương thích, theo giả thiết ta có $\widetilde{k} = \varphi(h, k)$. Do $h \wedge g \leq k$ suy ra $g \leq \widetilde{k}$. Vì h, g tương thích nên $gh_1x > h_1x$, do đó $g\widetilde{h}x > \widetilde{h}x$. Khi đó $d_2 = g\widetilde{h}x \leq \widetilde{k}\widetilde{h}x = d$, điều này trái với giả thiết.

Ta chuyển sang giả thiết rằng h, g không tương thích. Khi đó $h(h_1 \wedge \widetilde{h})x > (h_1 \wedge \widetilde{h})x > g(h_1 \wedge \widetilde{h})x$. Từ (2) ta có $a \wedge d_2 = g(h_1 \wedge \widetilde{h})x \leq kk_1x = b$. Lại áp dụng Định lý 1: $gk_1x \leq kk_1x$. Khi đó $g\widetilde{h}x \leq k\widetilde{h}x$.

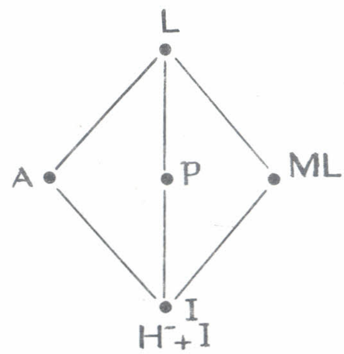
Nếu $\widetilde{k} = k$ thì $k\widetilde{h}x = \widetilde{k}\widetilde{h}x$. Nếu $\widetilde{k} = \varphi(h, k)$ thì h, k tương thích nghĩa là ta cũng có $k\widetilde{h}x > \widetilde{h}x$. Do đó $k\widetilde{h}x \leq \widetilde{k}\widetilde{h}x$. Bởi vậy, từ $g\widetilde{h}x \leq k\widetilde{h}x$ ta luôn luôn có $d_2 = g\widetilde{h}x \leq k\widetilde{h}x \leq \widetilde{k}\widetilde{h}x = d$, điều này trái với giả thiết.

Như vậy, chúng ta đã chứng minh được rằng $d \neq d_2$ là điều không thể xảy ra. Nghĩa là ta có $d = d_2$, tức là $\varphi_2(a, b) = \widetilde{k}\widetilde{h}x$, trong đó $\widetilde{h} = \varphi^i(h_1, k_1) \in LH_i^C$, $\widetilde{k} = k$ hoặc $\widetilde{k} = \varphi(h, k)$ tùy thuộc tương ứng vào h, k không tương thích hay tương thích. □

Với những kết quả được trình bày trên, chúng ta đã có thể hoàn toàn xác định được phép kéo theo φ_2 trên dàn phân phối hữu hạn X_2, nếu xác định được phép kéo theo φ^i, φ^i_* trên dàn hữu hạn $LH_i^C + I$.

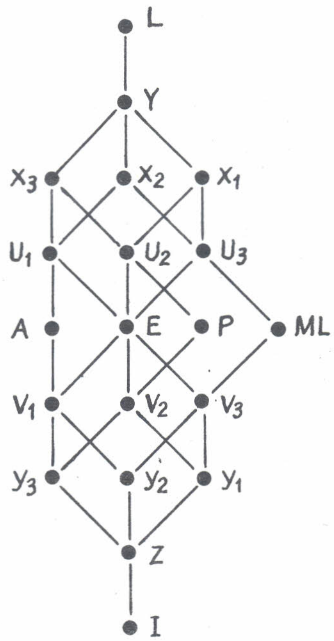
Bây giờ chúng ta sẽ lấy một ví dụ cụ thể về cấu trúc mịn hóa của đại số gia tử và xác định phép kéo theo φ_2 trên dàn X_2 của cấu trúc mịn hóa này.

Xét đại số gia tử $AX = (X, G, H, \leq)$, ở đây $G = \{\text{true}, \text{false}\}$, $H^+ = \{\text{V}, \text{M}\}$, $H^- = \{\text{L}, \text{A}, \text{P}, \text{ML}\}$. Trong đó V, M, L, A, P, ML là viết tắt tương ứng của Very, More, Little, Approximately, Possibly, More or Less. Các dàn $H^+ + I$, $H^- + I$ được biểu diễn như sau:



$H^+ + I$, $H^- + I$ là những dàn modula hữu hạn, thỏa mãn điều kiện (C_0). Khi đó các dàn $LH^+ + I$ và $LH^- + I$ sinh từ $H^+ + I$ và $H^- + I$ (tương ứng) được biểu diễn sau đây, là những dàn phân phối hữu hạn cũng thỏa mãn điều kiện (C_0).

$LH^+ + I$



$LH^- + I$

Trong đó:

$$\begin{array}{lll} x_1 = \mathrm{P} \vee \mathrm{ML} & x_2 = \mathrm{ML} \vee \mathrm{A} & x_3 = \mathrm{A} \vee \mathrm{P} \\ u_1 = x_2 \wedge x_3 & u_2 = x_3 \wedge x_1 & u_3 = x_1 \wedge x_2 \\ y_1 = \mathrm{P} \wedge \mathrm{ML} & y_2 = \mathrm{ML} \wedge \mathrm{A} & y_3 = \mathrm{A} \wedge \mathrm{P} \\ v_1 = y_2 \vee y_3 & v_2 = y_3 \vee y_1 & v_3 = y_1 \vee y_2 \end{array}$$

$\mathrm{E} = (\mathrm{A} \vee \mathrm{P}) \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{ML}) \wedge (\mathrm{ML} \vee \mathrm{A}) = (\mathrm{A} \wedge \mathrm{P}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{ML}) \vee (\mathrm{ML} \wedge \mathrm{A})$,
$\mathrm{Z} = y_1 \wedge y_2 \wedge y_3$, $\mathrm{Y} = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

Trong ví dụ này các phép kéo theo φ và φ_* trên các dàn $LH^C + I$ tương ứng được biểu thị bằng các công thức sau:

- Với h, k là hai gia tử thuộc $LH^+ + I$ thì:

$$\varphi(h, k) = \begin{cases} v & \text{nếu } h \le k \\ k & \text{nếu } h > k \end{cases} \qquad \varphi_*(h, k) = \begin{cases} k & \text{nếu } h < k \\ I & \text{nếu } h \ge k \end{cases}$$

- Với h, k là hai gia tử thuộc $LH^- + I$ thì

$$\varphi(h, k) = \begin{cases} L & \text{nếu } h \le k \\ k & \text{nếu } h = L \text{ và } k \ne L \\ I & \text{nếu } k = I \text{ và } h \ne I \\ \varphi^i(h, k) \in LH_i^- & \text{đối với các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

$$\varphi_*(h, k) = \begin{cases} I & \text{nếu } h \ge k \\ k & \text{nếu } h = I \text{ và } k \ne I \\ L & \text{nếu } k = L \text{ và } h \ne L \\ \varphi_*^i(h, k) \in LH_i^- & \text{đối với các trường hợp khác} \end{cases}$$

trong đó LH_i^- là dàn được sinh bởi $\{\mathrm{A}, \mathrm{P}, \mathrm{ML}\}$, $\varphi^i(h, k)$ và $\varphi_*^i(h, k)$ được xác định trong bảng I và bảng II sau đây.

Bảng I. Giá trị của $\varphi(h, k)$ với $h, k \in LH_i^-$ (dàn sinh bởi $\{A, P, ML\}$)

	Z	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	v_3	A	E	P	ML	u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	Y
Z	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y_1	A	1	A	A	A	x_1	1	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y_2	P	P	1	P	1	P	1	1	1	P	1	1	1	1	1	1	1	1
y_3	ML	ML	ML	1	1	1	ML	1	1	1	ML	1	1	1	1	1	1	1
v_1	y_1	y_1	v_3	v_2	1	v_2	ML	1	1	P	ML	1	1	1	1	1	1	1
v_2	y_2	ML	y_2	A	A	1	ML	A	1	1	ML	1	1	1	1	1	1	1
v_3	y_3	P	A	y_3	A	P	1	A	1	P	1	1	1	1	1	1	1	1
A	y_1	y_1	ML	P	x_1	P	ML	1	x_1	P	ML	1	x_2	x_1	x_1	1	1	1
E	Z	y_1	v_3	v_2	A	P	ML	A	1	P	ML	1	1	1	1	1	1	1
P	y_2	ML	y_2	A	A	u_3	ML	A	u_3	1	ML	u_3	1	u_3	1	x_2	1	1
ML	y_3	P	v_1	y_3	v_1	P	x_3	A	x_3	P	1	x_3	x_3	1	1	1	x_3	1
u_1	Z	y_1	y_2	y_3	v_1	P	ML	A	x_1	P	ML	1	x_1	x_1	x_1	1	1	1
u_2	Z	y_1	y_2	y_3	A	v_2	ML	A	x_2	P	ML	x_2	1	u_3	1	x_2	1	1
u_3	Z	y_1	y_2	y_3	A	P	v_3	A	x_3	P	ML	x_3	x_3	1	1	1	x_3	1
x_1	Z	y_1	y_2	y_3	A	v_2	v_3	A	u_1	P	ML	u_1	x_3	x_2	1	x_2	x_3	1
x_2	Z	y_1	y_2	y_3	v_1	P	v_3	A	u_2	P	ML	x_3	u_2	x_1	x_1	1	x_3	1
x_3	Z	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	ML	A	u_3	P	ML	x_2	x_1	u_3	x_1	x_2	1	1
Y	Z	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	v_3	A	E	P	ML	u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	1

KẾT LUẬN

Như vậy từ lớp đại số gia tử [1] với tính PN-homogeneous, chúng ta đã có cấu trúc mịn hóa của đại số gia tử (RHA) mà tập các phần tử sinh nguyên thủy được sắp thứ tự tuyến tính là một dàn phân phối [5]. Nếu như tập các phần tử sinh nguyên thủy là hữu hạn và sắp thứ tự tuyến tính thì phép kéo theo φ_2 trên dàn con X_2 của RHA là hoàn toàn xác định qua φ và φ_* trên dàn hữu hạn $LH^C + I$. Hơn thế nữa, φ_2 được hoàn toàn xác định qua φ^i, φ^i_* trên các dàn hữu hạn LH_i^C. Việc xác định φ^i và φ^i_* trên dàn LH_i^C nhìn chung là đơn giản do đặc điểm và số phần tử hạn chế của LH_i^C. Mặt khác, trong thực tế của ngôn ngữ tự nhiên nói chung thì mỗi biến ngôn ngữ cũng chỉ tác động bởi hai gia tử là cùng, Vì vậy chúng tôi cho rằng việc xác định phép kéo theo φ_2 trên dàn con X_2, chứ không phải việc xác định phép kéo theo trên toàn bộ dàn RHA, cũng sẽ cho ta những điều bổ ích nhất định trong việc nghiên cứu tiếp theo.

Bảng II. Giá trị của $\varphi_*(h, k)$ với $h, k \in LH_i^-$ (dàn sinh bởi {A, P, ML})

	Z	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	v_3	A	E	P	ML	u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	Y
Z	0	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	v_3	A	E	P	ML	u_1	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	Y
y_1	0	0	y_2	y_3	v_1	y_3	y_2	A	v_1	P	ML	A	u_2	u_3	x_1	x_2	x_3	Y
y_2	0	y_1	0	y_3	y_3	v_2	y_1	A	v_2	P	ML	u_1	P	ML	x_1	x_2	x_3	Y
y_3	0	y_1	y_2	0	y_2	y_1	v_3	A	v_3	P	ML	u_1	u_2	ML	x_1	x_2	x_3	Y
v_1	0	y_1	0	0	0	y_1	y_1	A	y_1	P	ML	P	P	ML	x_1	x_2	x_3	Y
v_2	0	0	y_2	0	y_2	0	y_2	A	y_2	P	ML	A	u_2	ML	x_1	x_2	x_3	Y
v_3	0	0	0	y_3	y_3	y_3	0	A	E	P	ML	A	P	u_3	x_1	x_2	x_3	Y
A	0	y_1	0	0	0	y_1	y_1	0	y_1	P	ML	y_1	P	ML	x_1	ML	P	Y
E	0	0	0	0	0	0	0	A	0	P	ML	A	P	ML	x_1	x_2	x_3	Y
P	0	0	y_2	0	y_2	0	y_2	A	y_2	0	ML	A	y_2	ML	ML	x_2	A	x_2
ML	0	0	0	y_3	y_3	y_3	0	A	y_3	P	0	u_1	P	y_3	P	u_1	x_3	x_3
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	P	ML	0	P	ML	x_1	ML	P	x_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	A	0	0	ML	A	0	ML	ML	x_2	A	x_2
u_3	0	0	0	0	0	0	0	A	0	P	0	A	P	0	P	A	x_3	x_3
x_1	0	0	0	0	0	0	0	A	0	0	0	A	0	0	0	A	A	A
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	P	0	0	P	0	P	0	P	P
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ML	0	0	0	ML	ML	0	ML
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. Cat Ho, W. Wechler, Hedge algebras, an algebraic approach to structure of sets of linguistic truth values, *Fuzzy Sets and Systems* **35** (1990) 281-293.

[2] N. Cat Ho, W. Wechler, Extended Hedge algebras and their application to Fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **52** (1992) 259-281.

[3] N. Cat Ho, H. Van Nam, A refinement structure of Hedge algebra, *Proc. of the NCST of Vietnam* **9** (1) (1997) 15-18.

[4] M. Mashinchi, N. Cat Ho, On lattice implication operators, *Proc. of the NCST of Vietnam* **8** (1) (1996) 15-33.

[5] N. C. Ho, H. V. Nam, A theory of refinement structure of hedge algebras and its application to linguistic valued fuzzy logic, in D. Niwinski & M. Zawadowski (Eds.), "Logic, Algebra and Computer Science" (Banach Center Publications, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1998).

Nhận bài ngày 13 - 3 - 1998

Đại học Quốc gia Hà Nội